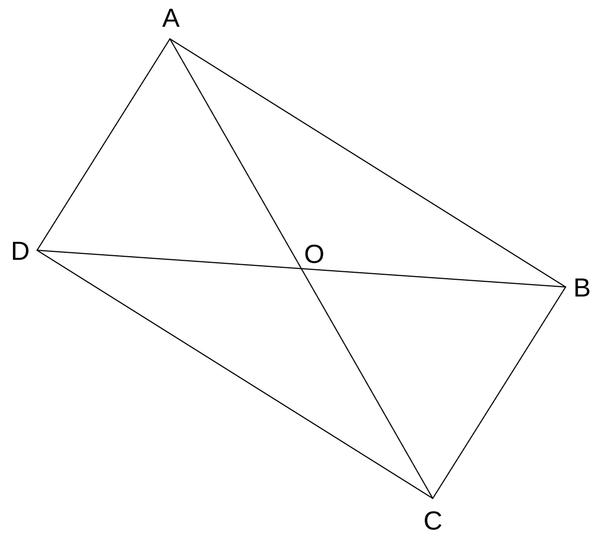
Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2006 du sujet de Guadeloupe, Guyane, Martinique

Exercice 1 On note $\mathcal{A}$ la fonction *aire*.

1. On nomme $ABCD$ ce rectangle et O l'intersection de ses diagonales.



Soit σ la symétrie centrale de centre O. O est centre de symétrie du rectangle, donc $\sigma(O) = O$; $\sigma(A) = C$; $\sigma(B) = D$; $\sigma(C) = A$; $\sigma(D) = B$.

Puis $\sigma(AOB) = COD$, $\sigma(BOC) = DOA$, $\sigma(COD) = AOB$, $\sigma(DOA) = BOC$ et $\mathcal{A}(AOB) = \mathcal{A}(COD)$ et $\mathcal{A}(BOC) = \mathcal{A}(DOA)$ car une symétrie conserve les aires (propriété des isométries).

Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (BD).

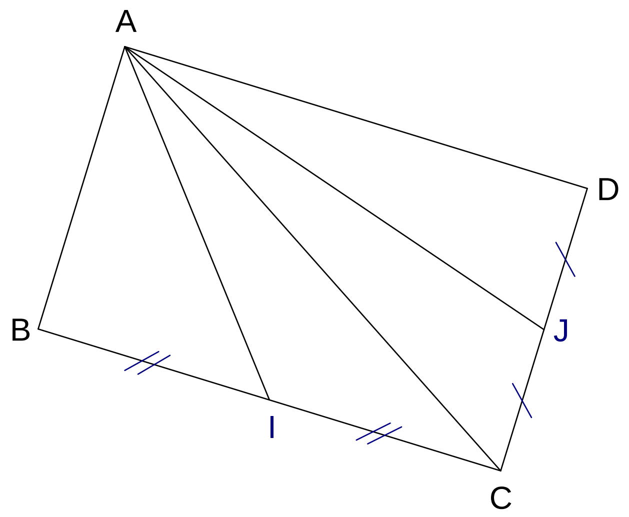
On a $\mathcal{A}(DOA) = \frac{DO \times AH}{2}$ et $\mathcal{A}(AOB) = \frac{OB \times AH}{2}$. Mais O est milieu du segment $[BD]$, donc $DO = OB$ et $\mathcal{A}(DOA) = \mathcal{A}(AOB)$.

Par suite, $\mathcal{A}(AOB) = \mathcal{A}(BOC) = \mathcal{A}(COD) = \mathcal{A}(DOA)$.

2. On nomme $ABCD$ ce rectangle, I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[CD]$.

$\mathcal{A}(ABI) = \frac{AB \times BI}{2}$ et $\mathcal{A}(AIC) = \frac{AB \times IC}{2}$. Or, I est le milieu du segment $[BC]$, donc $BI = IC$ et $\mathcal{A}(ABI) = \mathcal{A}(AIC)$.

$\mathcal{A}(ADJ) = \frac{AD \times DJ}{2}$ et $\mathcal{A}(AJC) = \frac{AD \times JC}{2}$. Or, J est le milieu du segment $[CD]$, donc $DJ = JC$ et $\mathcal{A}(ADJ) = \mathcal{A}(AJC)$.

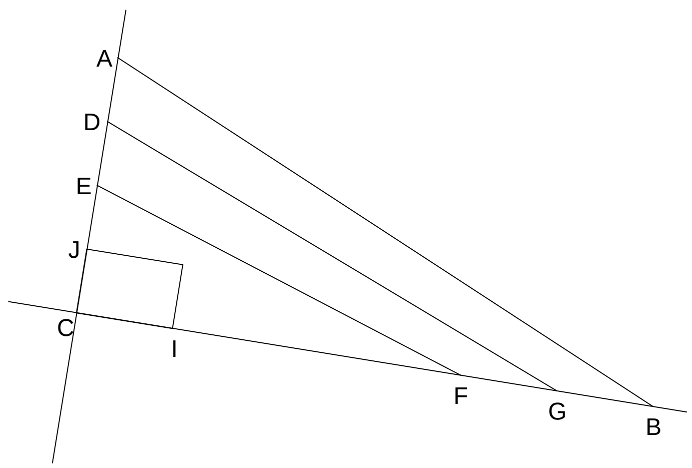


On a vu $\mathcal{A}(ABI) = \frac{AB \times BI}{2}$, mais $BI = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2}$ (car I est le milieu du segment $[BC]$ et car les côtés opposés d'un rectangle sont isométriques) ; de même, on a vu $\mathcal{A}(ADJ) = \frac{AD \times DJ}{2}$, mais $DJ = \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2}$ (car J est le milieu du segment $[DC]$ et car les côtés opposés d'un rectangle sont isométriques).

Donc, $\mathcal{A}(ABI) = \frac{AB \times AD}{4} = \mathcal{A}(ADJ)$.

Par suite, $\mathcal{A}(ABI) = \mathcal{A}(AIC) = \mathcal{A}(AJC) = \mathcal{A}(ADJ)$.

3. Figure.



$$\begin{aligned} \mathcal{A}(CEF) &= \frac{CE \times CF}{2} \\ &= \frac{(2 \times CJ) \times (4 \times CI)}{2} \\ &= 4 \times CJ \times CI \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(DGFE) &= \mathcal{A}(CDG) - \mathcal{A}(CEF) \\
&= \frac{CD \times CG}{2} - \mathcal{A}(CEF) \\
&= \frac{(3 \times CJ) \times (5 \times CI)}{2} - \mathcal{A}(CEF) \\
&= \frac{15}{2} \times CJ \times CI - 4 \times CJ \times CI \\
&= \frac{7}{2} \times CJ \times CI
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(ABGD) &= \mathcal{A}(CAB) - \mathcal{A}(CDG) \\
&= \frac{CD \times CG}{2} - \mathcal{A}(CDG) \\
&= \frac{(4 \times CJ) \times (6 \times CI)}{2} - \mathcal{A}(CDG) \\
&= 12 \times CJ \times CI - \frac{15}{2} \times CJ \times CI \\
&= \frac{9}{2} \times CJ \times CI
\end{aligned}$$

Les polygones EFC, $DGFE$ et $ABGD$ n'ont donc pas la même aire (même pris deux à deux).

Question complémentaire

1. D'après le document d'accompagnement des programmes de cycle 3 ... [entre crochets, des commentaires qui concernent l'activité]

   Il s'agit d'un **problème de recherche**, c'est-à-dire un problème pour lequel l'élève ne dispose pas de démarche préalablement explorée : certains de ces **problèmes** sont **utilisés pour permettre** la construction de connaissances nouvelles, d'autres sont davantage destinés à placer l'élève en situation de chercher, **d'élaborer une solution originale**.

   Au cycle 3, les compétences suivantes seront particulièrement travaillées :

   ✓ **utiliser ses connaissances pour traiter des problèmes** ; [oui, dans le domaine de la comparaison de surfaces par superposition, ...] ;

   ✓ **chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche** ; [oui, évidemment] ;

   ✓ **mettre en oeuvre un raisonnement, articuler les différentes étapes d'une solution** ; [oui, on peut considérer que, par étapes, l'élève partage d'abord en deux parts égales puis encore chaque part en deux parts égales] ;

   ✓ **formuler et communiquer sa démarche et ses résultats par écrit** et les exposer oralement ; [oui, par écrit] ;

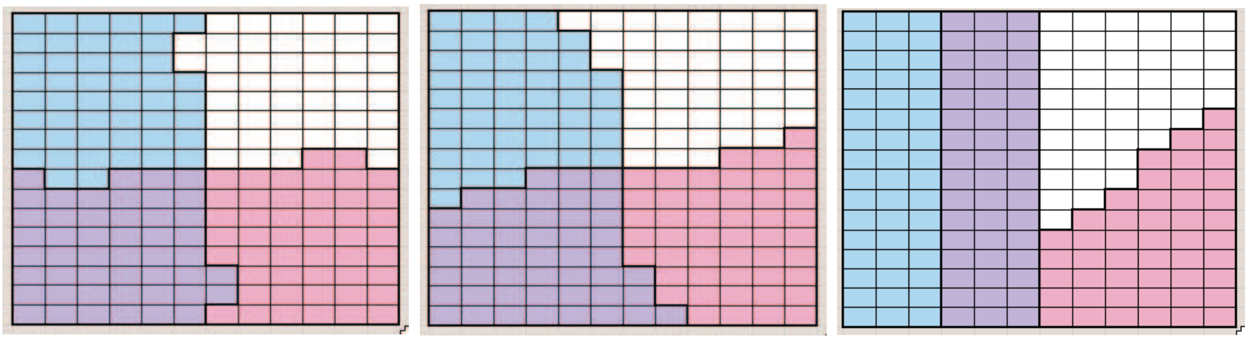
   ✓ **contrôler et discuter la pertinence ou la vraisemblance d'une solution** ; [oui, par recollement de surfaces, ...] ;

✓ identifier des erreurs dans une solution en distinguant celles qui sont relatives au choix d'une procédure de celles qui interviennent dans sa mise en oeuvre ; [non, pas forcément] ;

✓ argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi-même ou par un camarade (ceci suppose que les élèves ne pensent pas que la démarche est unique, et donc que l'enseignant accepte des démarches différentes) ; [non, l'élève n'est pas invité à trouver des solutions différentes].

2. Pour cette deuxième procédure demandée, on supposera qu'elle s'adresse à un élève de cycle 3.

   Au lieu de plier, l'élève peut partir de la solution proposée (en quatre rectangles superposables) puis procéder par échanges d'une même sous-part : si je prends une sous-part d'aire x à la part 1 pour la donner à la part 2 et que réciproquement, je prends une autre sous-part d'aire x à la part 2 pour la donner à la part 1, les parts 1 et 2 ne changent pas d'aire. L'élève peut ainsi obtenir, par exemple, le partage qui suit :



   Le premier partage propose un partage équitable de la croûte, pas le deuxième où les longueurs de croûtes sont égales deux à deux, ni le troisième où toutes les longueurs de croûtes sont distinctes.

3. ✓ $\boxed{\text{Elève A}}$: il pave son rectangle par huit rectangles superposables (à l'aide d'un pliage (3 plis consécutifs : 2 dans le sens de la longueur ; 1 dans le sens de la largeur)) puis en donne deux à chacun, ce qui lui permet d'obtenir quatre parts égales (mais pas forcément connexes, i.e. d'un seul tenant). Procédure et résultats corrects.

   ✓ $\boxed{\text{Elève B}}$: il pave son rectangle par quatre rectangles superposables (à l'aide d'un pliage (2 plis consécutifs dans le sens de la largeur)). Procédure et résultats corrects.

   ✓ $\boxed{\text{Elève C}}$: il plie en deux dans la longueur pour obtenir deux rectangles superposables ; puis, il plie l'une des deux parts en deux parties égales dans la largeur de cette part rectangulaire et l'autre de ces parts en deux parties "presque" égales (le "presque" n'est dû qu'à l'imprécision du pliage, car la procédure est expliquée correctement) selon la diagonale de cette part rectangulaire ; il obtient ainsi quatre parts "presque" égales. Procédure correcte, mais imprécision du pliage.

4. Pour vérifier l'égalité de deux parts, on peut imaginer un **découpage de l'une pour paver l'autre**. Pour vérifier l'inégalité des croûtes, on peut imaginer un **mesurage** de la longueur totale des croûtes (comme somme des longueurs des morceaux de croûtes).

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$

1. (a)

Récipient	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
Jauge	E	C	F	A	B	D

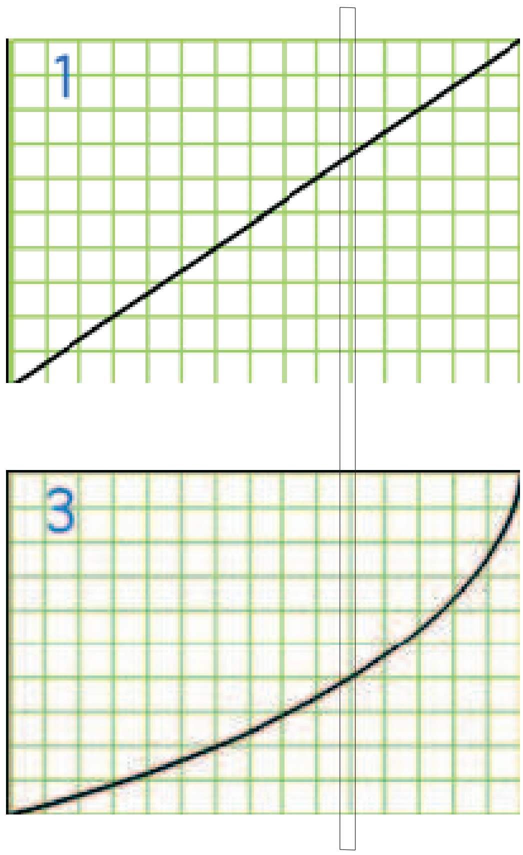
   (b)

Récipient	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
Courbe	2	1	5	4	6	3

2. Le volume du cylindre (et de chacun des récipients) est de $10l$ soit $10dm^3$ ou encore $10000cm^3$.
   D'autre part, le volume du cylindre est donné par la formule $\pi \times r^2 \times h$ où r est le rayon du cercle de base et h est la hauteur de ce cylindre. Sachant que $r = \frac{16}{2}cm = 8cm$, on déduit $h = \frac{10000cm^3}{\pi \times 8^2 cm^2} \approx 50cm$.
3. Il suffit de remplir le tableau de proportionnalité suivant (d'après la formule précédente, le volume d'un cylindre est proportionnel à sa hauteur) :

hauteur	h	$\frac{2}{3} \times h$
Volume	$10l$	x

   Et, par exemple, par l'utilisation du produit en croix, on trouve $x = \frac{2}{3} \times 10l = \frac{20}{3}l \approx 6,7l$.
4. Le remplissage du cylindre R_2 (graphe 1) est linéaire (débit constant). Il atteint donc les deux tiers de son volume en les deux tiers du temps.



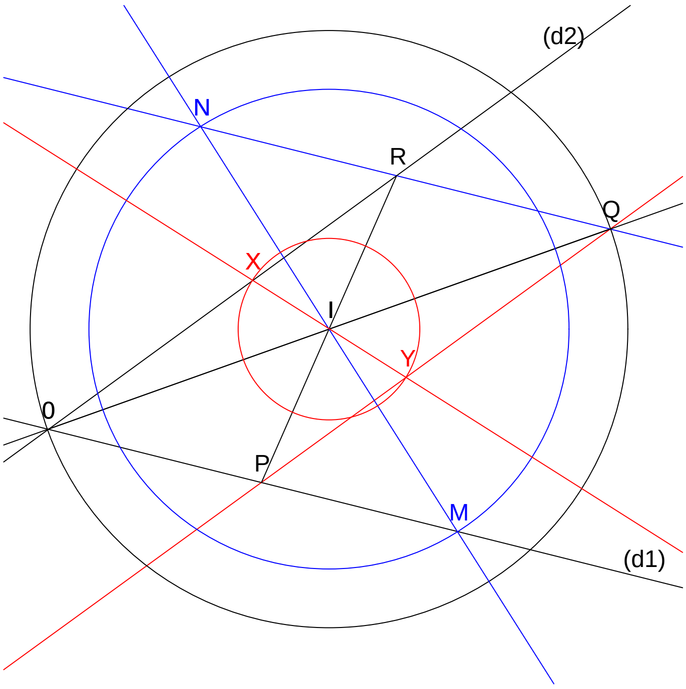
   Graphiquement, il suffit donc de tracer un trait vertical aux deux tiers du temps et de voir à quelle hauteur cela correspond pour le récipient R_6 (graphe 3).

On trouve ainsi que le récipient R_6 sera rempli aux $\frac{4}{10}$ de sa hauteur.

Comme les récipients ont tous même hauteur, lorsque R_2 est rempli aux $\frac{2}{3} \times h$, R_6 est rempli (approximativement puisque graphiquement) aux $\frac{4}{10} \times h$. La hauteur d'eau dans le récipient R_6 est donc inférieure à la hauteur d'eau dans le récipient R_2.

Exercice 3

1. O, I (d_1) et (d_2) sont posés.



En noir. Je trace le cercle de centre I de rayon IO qui coupe la droite (OI) en deux points distincts O et Q (ainsi Q est le symétrique de O par rapport à I).

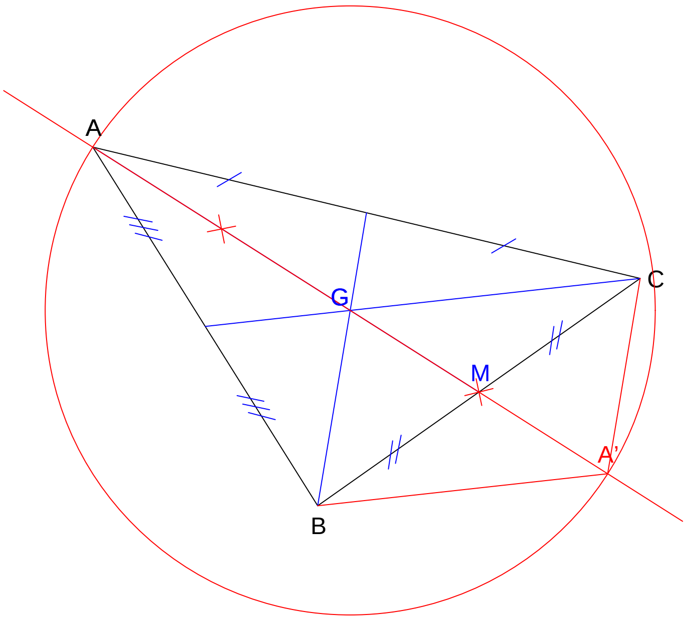
En bleu. Ensuite, je trace la parallèle à la droite (d_1) passant par Q : construction d'un parallélogramme $OMQN$ -avec M sur (d_1)- (utilisation de la propriété qui dit que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu et qui permet de conclure que $(NQ)//(d_1)$).

En rouge. Ensuite, je trace la parallèle à la droite (d_2) passant par Q : construction d'un parallélogramme $OXQY$ -avec X sur (d_2)- (utilisation de la propriété qui dit que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu et qui permet de conclure que $(YQ)//(d_2)$).

En noir. P est le point de concours des droites (d_1) et (YQ) ; R est le point de concours des droites (d_2) et (NQ).

2. (a) D'après une propriété du centre de gravité, on a : $GM = \frac{GA}{2}$ et $M \notin [GA)$.
   Comme A' est symétrique de A par rapport à G, on a : $GA = GA'$ et $A' \notin [GA)$.
   D'où, $GM = \frac{GA'}{2}$ et $M \in [GA')$, puis M est milieu du segment $[GA']$.

   (b) M est milieu du segment $[GA']$ et M est milieu du segment $[BC]$, donc $GBA'C$ est un parallélogramme (car ses diagonales se coupent en leur milieu M).

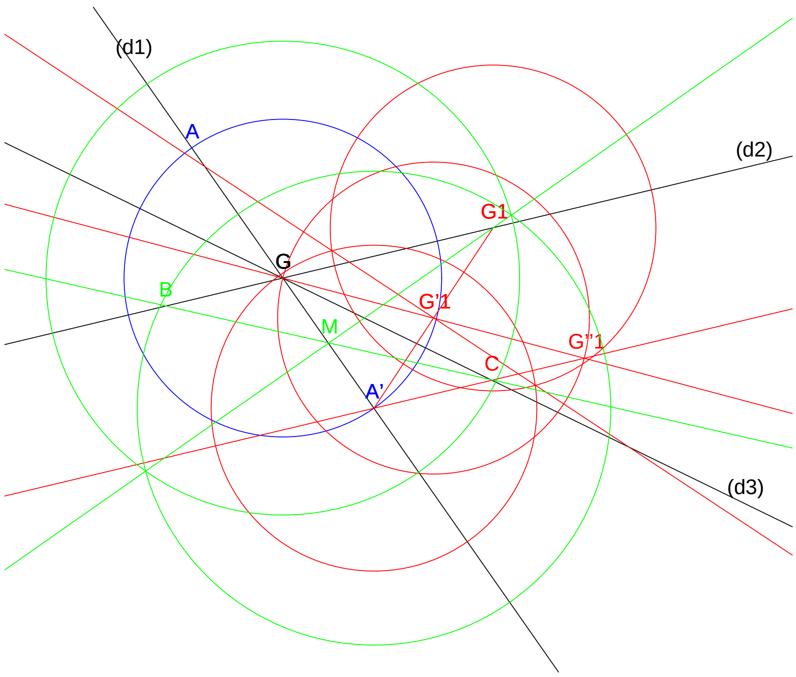


(c) $GBA'C$ est un parallélogramme, donc ses côtés sont parallèles et

✓ les droites (GB) et (CA') sont parallèles ;

✓ les droites (GC) et (BA') sont parallèles.

3. Les droites (d_1), (d_2), (d_3) ainsi que le point G sont posés (G est le point de consours des trois droites).



En bleu. Je construis le symétrique de A par rapport à G que je nomme A'.

En rouge. Ensuite, je trace a parallèle à la droite (d_2) passant par A' (comme B est sur (d_2) et qu'on a montré que les droites (GB) et (CA') sont parallèles en 3.(b), il vient que les droites (d_2) et (CA') sont parallèles) : je prends G_1 sur (d_2), je construis le milieu G'_1 du segment $[G_1A']$ puis G''_1 le symétrique de G par rapport à G'_1 (utilisation de la propriété qui dit que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu et qui permet de conclure que $(GG_1)//(A'G''_1)$). Je définis C comme intersection de la droite $(A'G''_1)$ et de la droite (d_3).

$\boxed{\text{En vert.}}$ Ensuite, je construis le milieu M du segment $[GA']$ puis B est l'intersection des droites (CM) et (d_2) (démontré au point 3.(a)).

Question complémentaire

1. Les procédures ...

   Pour justifier des propriétés mises en jeu, il faut des hypothèses de construction de la figure de base donnée aux élèves :

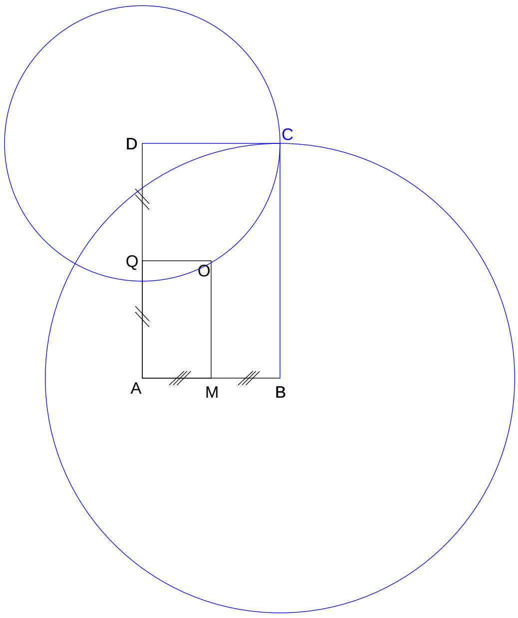
   ✓ $AMOQ$ est supposé être un rectangle ;

   ✓ M est supposé être milieu du segment $[AB]$;

   ✓ Q est supposé être milieu du segment $[AD]$

   $\boxed{\text{Procédure 1.}}$ Je trace un cercle de centre D, de rayon AB. Je trace un cercle de centre B, de rayon AD. Ces deux cercles se coupent en deux points et je choisis C à l'intersection de ces deux cercles de façon à ce que le quadrilatère $ABCD$ soit convexe).

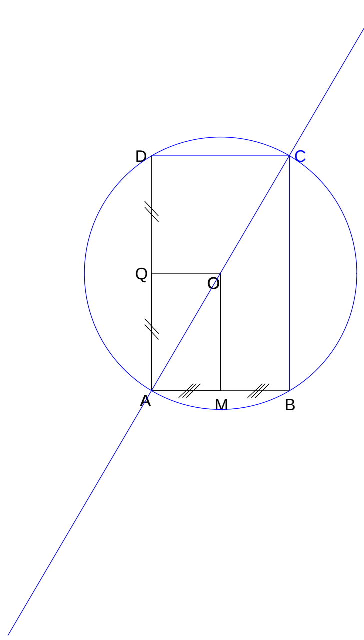
   Justification. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme car convexe et de côtés opposés égaux. Mais, comme l'angle en A est droit -angle d'un rectangle-, le parallélogramme $ABCD$ est en fait un rectangle (car un parallélogramme avec un angle droit est un rectangle).



   $\boxed{\text{Procédure 2.}}$ Je trace un cercle de centre O, de rayon OA. Ce cercle coupe la droite (AO) en deux points distincts A et C.

   Justification. Le quadrilatère $ABCD$ est tel que O soit milieu du segment $[AC]$. Mais, comme O est déjà milieu du segment $[BD]$ (les triangles QAM et OMB sont trivialement isométriques car

$QA = OM$ -côtés opposés d'un rectangle-, $AM = MB$ et $\widehat{QAM} = \widehat{OMB} = 90^\circ$, donc $QM = OB$ et le quadrilatère $QMBO$ est un parallélogramme -côtés opposés isométriques et convexe- ; de même le quadrilatère $QMOD$ est un parallélogramme ; puis $(BO)//(QM)//(OD)$ et B, O et D sont alignés -$(BO) = (OD)$ comme droites parallèles ayant un point commun- et enfin, $BO = QM = OD$, ce qui conclut), le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (car un quadrilatère qui a ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme). Et, comme l'angle en A est droit, le parallélogramme $ABCD$ est en fait un rectangle (car un parallélogramme avec un angle droit est un rectangle).

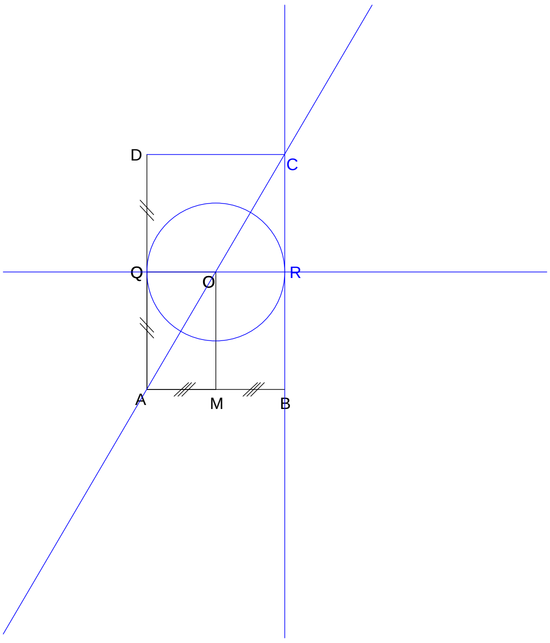


$\boxed{\text{Procédure 3.}}$ Je trace un cercle de centre O, de rayon OQ. Ce cercle coupe la droite (OQ) en deux points distincts Q et R. Les droites (AO) et (BR) se coupent en C.

Justification : soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite (MO). Evidemment, $s(O) = O$ et $s(M) = M$ car O et M sont sur l'axe de symétrie. On a $s(A) = B$ et $s(B) = A$ (car la droite (OM) étant perpendiculaire au segment $[AB]$ -angle d'un rectangle- et passant par le milieu de ce segment, elle est la médiatrice du segment $[AB]$). Pour la même raison, on a $s(Q) = R$ et $s(R) = Q$. Par suite, $s((AQ)) = (BR)$ et $s((BO)) = (AO)$, donc $s((AQ) \bigcap (BO)) = (BR) \bigcap (AO)$ ou $s(D) = C$ (l'alignement des points B, O et D a déjà été montré lors de la justification de la deuxième procédure). Le quadrilatère $ABCD$ admet donc un axe de symétrie, (OM) qui n'est pas une diagonale de ce quadrilatère, c'est donc un trapèze isocèle. Mais, comme l'angle en A est droit -angle d'un rectangle-, le trapèze isocèle $ABCD$ est en fait un rectangle (car un trapèze isocèle avec un angle droit est un rectangle).

Remarque : les constructions de parallèles ou de perpendiculaires à la règle et au compas ne sont pas du ressort de l'Ecole.

2. $\boxed{\text{Difficulté n°1}}$. L'élève doit prendre conscience que les seuls **points utilisables** sont ceux déjà construits (soit donnés, soit construits comme intersections) et que **les outils** qui sont mis à sa disposition **permettent uniquement de tracer des droites** (à partir de deux points construits) **et de tracer**



des cercles (de centre un point construit et de rayon une longueur donnée par celle d'un segment d'extrémités construites), ce qui permet en particulier de reporter une longueur.

$\boxed{\text{Difficulté n°2}}$. L'élève doit savoir parmi les **propriétés du rectangle** celles qui vont pouvoir être utilisées pour le construire en utilisant uniquement le compas et la règle non graduée. Remarque : c'est l'isométrie des côtés opposés qui devrait remporter la majorité des suffrages (procédure n°1).

3. (a) **Oui**, il est possible d'utiliser cette propriété : je trace un cercle de centre A, de rayon BD ; ce cercle coupe la droite (OA) en deux points distincts A et C.

   (b) **Oui** ! Pour la procédure n°2, le cercle utilisé sert à reporter une longueur, cela peut donc être réalisé avec la règle graduée. Pour la procédure n°3, également. Cependant, pour la procédure n°1, il sera impossible à la règle graduée de construire l'intersection de deux cercles.

4. On peut proposer l'**équerre** et utiliser la propriété : un quadrilatère qui possède trois angles droits est un rectangle.

   Par exemple :

   je mène la perpendiculaire à la droite (AD) passant par D et la perpendiculaire à la droite (AB) passant par B ; ces deux perpendiculaires se coupent en C.