# *Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2006 du sujet d'Amiens, Lille, Rouen, Paris, Créteil, Versailles*

Denis Vekemans *

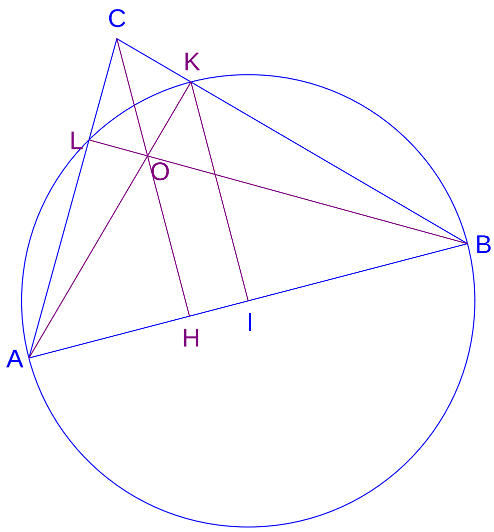
**Exercice 1**

1. $a = \frac{5\times c}{2}$ ; $b = \frac{3\times c}{2}$ et $d = e = \frac{c}{2}$.
2. ✓ Longueur du rectangle : $\mathcal{L} = a + b = 4 \times c$.
   ✓ Largeur du rectangle : $l = a = \frac{5\times c}{2}$.
   ✓ Aire du rectangle : $\mathcal{L} \times l = 10 \times c^2 = 3610$ cm$^2$.
   Donc, $c = \sqrt{\frac{3610}{10}}$ cm, et $c = 19$ cm. Ainsi,
   ✓ Longueur du rectangle : $\mathcal{L} = 4 \times 19$ cm $= 76$ cm.
   ✓ Largeur du rectangle : $l = \frac{5\times 19}{2}$ cm $= \frac{95}{2}$ cm $= 47,5$ cm.
3. $\mathcal{A}$ est la fonction aire ; $\mu$ est la fonction masse.
   Comme $a = \frac{5\times c}{2}$ ; $b = \frac{3\times c}{2}$ et $d = e = \frac{c}{2}$, on déduit que
   ✓ Aire de A : $\mathcal{A}(A) = 25 \times \mathcal{A}(E)$,
   ✓ Aire de B : $\mathcal{A}(B) = 9 \times \mathcal{A}(E)$,
   Donc, $\mathcal{A}(A) = \frac{25}{9} \times \mathcal{A}(B)$.
   La plaque étant homogène, on déduit : $\mu(A) = \frac{25}{9} \times \mu(B) = \frac{25}{9} \times 100$ g $= \frac{2500}{9}$ g $\approx 277,8$ g (approximation au dg près).
4. $\mathcal{V}$ est la fonction volume.
   Comme $a = \frac{5\times c}{2}$ ; on déduit que $a^3 = \frac{5^3\times c^3}{2^3}$, c'est-à-dire $\mathcal{V}(C) = \frac{8}{125} \times \mathcal{V}(A) = \frac{8}{125} \times 2$ m$^3 = \frac{8}{125} \times 2 \times 1000$ dm$^3 = 128$ dm$^3$.

**Exercice 2**

1. $I$ est milieu de $[AB]$. Puisque $K$ est sur le cercle de dianmètre $[AB]$, le triangle $AKB$ est rectangle en $K$ (un triangle inscrit dont un des angles intercepte un diamètre de ce cercle, est rectangle et a pour

*Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France




hypoténuse ce diamètre). Cependant, comme l'angle $\widehat{ABK}$ mesure $45^\circ$, l'angle $\widehat{BAK}$ mesure également $45^\circ$ (le triangle $AKB$ étant rectangle en $K$, les angles $\widehat{ABK}$ et $\widehat{BAK}$ sont complémentaires). Il s'ensuit que le triangle $AKB$ est isocèle et rectangle en $K$ (un triangle ayant deux angles égaux est isocèle).

En synthèse, on a

✓ $KA = KB$ (car le triangle $AKB$ est isocèle en $K$),

✓ et $IA = IB$ (car $I$ est milieu de $[AB]$),

donc $(KI)$ est médiatrice de $[AB]$ (une droite passant par deux points distincts équidistants de $A$ et de $B$ est médiatrice du segment $[AB]$).

2. De la même façon qu'on a montré que le triangle $AKB$ est rectangle en $K$, on obtient que le triangle $ALB$ est rectangle en $L$.

   Ainsi, $(AK)$ et $(BL)$ sont deux hauteurs du triangle $ABC$ (par définition d'une hauteur). Il s'ensuit que $O$ est l'orthocentre du triangle $ABC$ (les hauteurs se coupent en l'orthocentre). Enfin, $(CH)$ qui est hauteur également du triangle $ABC$ (par définition d'une hauteur) passe par $O$ (les hauteurs sont concourantes) et les points $C$, $H$ et $O$ sont alignés.

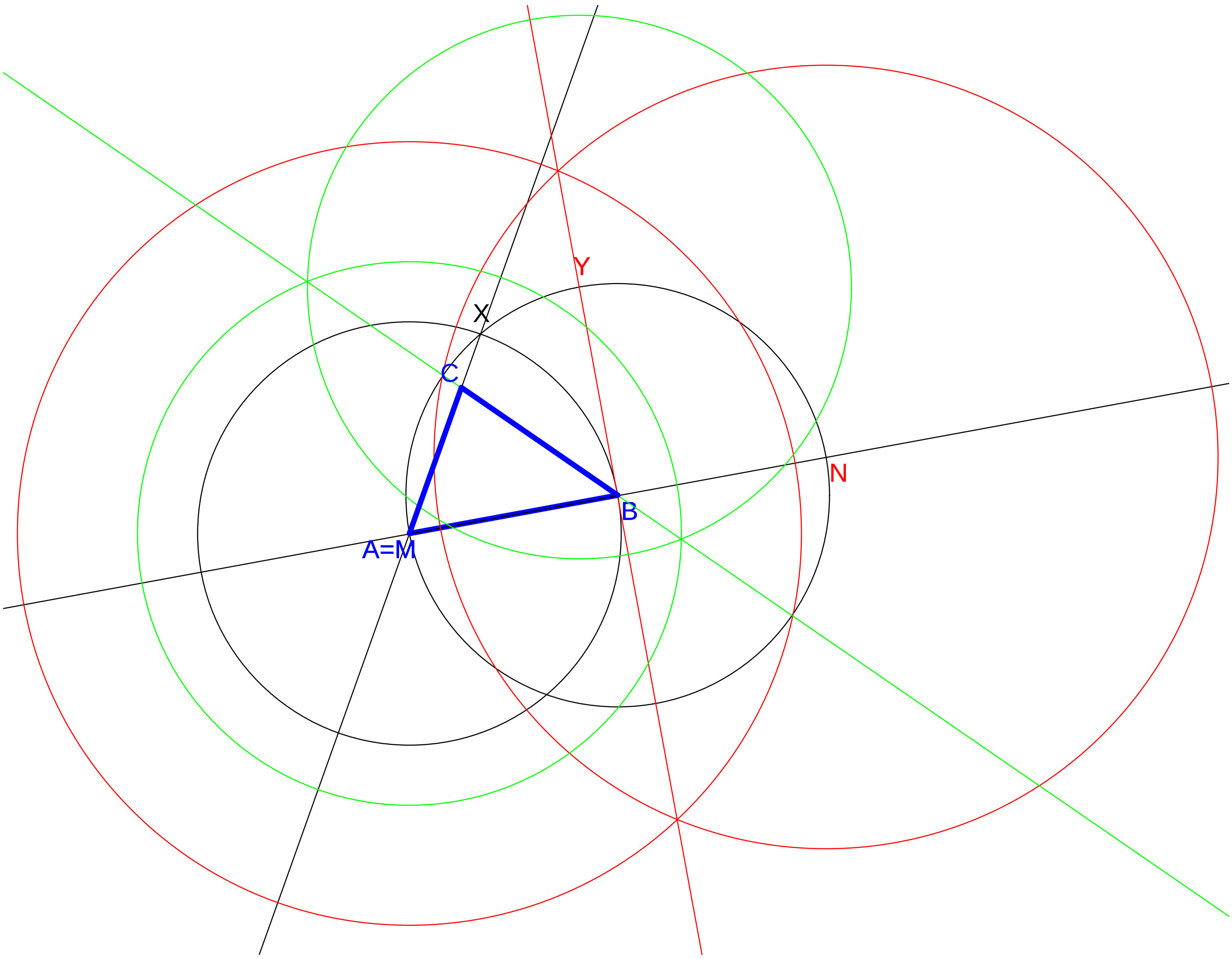
3. D'après la question précédente, $(CO)$ est perpendiculaire à $(AB)$. Et, $[KI]$ est médiane du triangle $ABK$ (par définition d'une médiane), donc $(KI)$ est hauteur du triangle $ABK$ (le triangle $ABK$ étant isocèle en $K$, hauteur et médiane issue de $K$ ont des supports confondus), et $(KI)$ est perpendiculaire à $(AB)$. Il s'ensuit que $(KI)$ et $(CO)$ sont parallèles (deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles) et que $IKCO$ est un trapèze.

4. ✓ En rouge, construction de l'angle droit ($90^\circ$) en $B$ (par construction de deux points $M$ et $N$ équidistants de $B$ sur $(AB)$, puis de la médiatrice $(BY)$ de $[MN]$).

   ✓ En vert, construction de l'angle de $45^\circ$ en $B$ (par construction de la bissectrice de $\widehat{ABY}$).

   ✓ En noir, construction de l'angle de $60^\circ$ en $B$ (par construction d'un triangle équilatéral $ABX$).

   *Remarques*. Il était possible d'utiliser la trame du quadrillage de la copie pour construire l'angle de


Y
X
C
N
B
A=M

$45^\circ$ car il n'était pas stipulé "sur papier uni", mais il fallait l'écrire. De même, les pliages étaient aussi acceptés pour la construction de cet angle de $45^\circ$. La reproduction "à l'identique" (i.e. à l'échelle 1 :1) n'était pas exigée.

**Exercice 3**

1. $26 = 11 + 3 \times 5$ ; $43 = 2 \times 11 + 3 \times 7$ ; $220012 = 20000 \times 11 + 7 + 5$.

   Les nombres 26, 43 et 220012 sont donc des scores possibles.

2. (a) Démonstration par exhaustion.

   Le tableau suivant justifie qu'il n'existe que deux possibilités pour obtenir 34 comme score.

| | | | | | | | Total | Conclusion |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 11 | 11 | 11 | | | | 44 | trop grand |
| 11 | 11 | 11 | 7 | | | | 40 | trop grand |
| 11 | 11 | 11 | 5 | | | | 38 | trop grand |
| 11 | 11 | 7 | 7 | | | | 36 | trop grand |
| 11 | 11 | 7 | 5 | | | | 34 | Première solution |
| 11 | 11 | 5 | 5 | 5 | | | 37 | trop grand |
| 11 | 7 | 7 | 7 | 7 | | | 39 | trop grand |
| 11 | 7 | 7 | 7 | 5 | | | 37 | trop grand |
| 11 | 7 | 7 | 5 | 5 | | | 35 | trop grand |
| 11 | 7 | 5 | 5 | 5 | 5 | | 38 | trop grand |
| 11 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | | 36 | trop grand |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | | | 35 | trop grand |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 5 | 5 | | 38 | trop grand |
| 7 | 7 | 7 | 5 | 5 | 5 | | 36 | trop grand |
| 7 | 7 | 5 | 5 | 5 | 5 | | 34 | Deuxième solution |
| 7 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 37 | trop grand |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 35 | trop grand |

   On ne trouve donc que deux solutions, à savoir :

$$\begin{aligned} 34 &= 2 \times 11 + 7 + 5 \\ &= 2 \times 7 + 4 \times 5. \end{aligned}$$

   (b) Le même type de tableau mène aux quatre solutions :

$$\begin{aligned} 40 &= 3 \times 11 + 7 \\ &= 11 + 2 \times 7 + 3 \times 5 \\ &= 5 \times 7 + 5 \\ &= 8 \times 5. \end{aligned}$$

3. Un tableau permet encore de présenter tous les scores réalisables avec trois fléchettes.

| | | | Total |
|---|---|---|---|
| 11 | 11 | 11 | 33 |
| 11 | 11 | 7 | 29 |
| 11 | 11 | 5 | 27 |
| 11 | 7 | 7 | 25 |
| 11 | 7 | 5 | 23 |
| 11 | 5 | 5 | 21 |
| 7 | 7 | 7 | 21 |
| 7 | 7 | 5 | 19 |
| 7 | 5 | 5 | 17 |
| 5 | 5 | 5 | 15 |

Les scores possibles sont donc : 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31.

4. (a)

$$\begin{aligned} 14 &= 2 \times 7 \\ 15 &= 3 \times 5 \\ 16 &= 11 + 5 \\ 17 &= 7 + 2 \times 5 \\ 18 &= 11 + 7 \end{aligned}$$

Les nombres 14, 15, 16, 17, 18 sont des scores possibles.

En ajoutant 5 à ces scores, on obtient les scores 19, 20, 21, 22, 23.

En ajoutant 5 à ces scores, on obtient les scores 24, 25, 26, 27, 28.

Et ainsi de suite ...

(b) Parmi les entiers non nuls strictement inférieurs à 14, seuls 5, 7, 10, 11 et 12 sont des scores possibles.

Donc, les entiers non nuls qui ne correspondent à aucun score sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 et 13.

**Questions complémentaires**

*Règle implicite* : les joueurs lancent chacun le même nombre de fléchettes.

1. D'après la question 2 de l'exercice 3, il n'existe que deux possibilités d'obtenir 34 comme score :

$$\begin{aligned} 34 &= 2 \times 11 + 7 + 5 \\ &= 2 \times 7 + 4 \times 5. \end{aligned}$$

Donc, quand ils lancent 6 fléchettes chacun,

✓ Guillaume a lancé deux fléchettes dans la zone du 7 et quatre fléchettes dans la zone du 5 ;

✓ Jeanne a lancé deux fléchettes dans la zone du 11, une fléchette dans la zone du 7, une fléchette dans la zone du 5, et deux en dehors de la cible.[1]

Camille a réalisé un score de $34 - 9 = 25$ et, comme le score 25 ne peut être atteint que de deux manières,

$$\begin{aligned} 25 &= 11 + 2 \times 7 \\ &= 5 \times 5, \end{aligned}$$

on déduit que Camille a lancé soit trois soit cinq fléchettes.

Au départ, le nombre de fléchettes semble une donnée manquante, mais le choix du score de 34 et les deux possibilités de l'atteindre font qu'il n'en est rien.[2]

2. (a) Pour résoudre ce problème, les élèves doivent essayer de décomposer 34 en somme de 11, de 7 et de 5 (aucun, un ou plusieurs de chaque). Ils doivent organiser leur recherche pour trouver les diverses solutions. Ils ne possèdent pas de solution *experte* pour résoudre directement le problème. Les outils mathématiques sont très simples et ce problème ne vise pas la construction d'une nouvelle connaissance. C'est donc un problème à classer dans "**problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte**."

   (b) Les calculs à effectuer se limitent à l'addition de nombres "simples" et sont à la portée d'un élève de **cycle 2 (que ce soit pour le champ numérique ou les calculs)**. Cependant, la nécessité de s'approprier l'énoncé tel qu'il est proposé (nombre de fléchettes inconnu), d'organiser les recherches, de vérifier que des solutions trouvées vérifient les contraintes de l'énoncé, en font davantage une situation à proposer en **cycle 3 (pour la complexité de la tâche à réaliser)**.

3. ✓ **Groupe 1**.

   Procédure : par multiplication et additions posées.

   Décompositions de 34 : les deux sont trouvées.

   Erreur(s) : il se trompe dans le calcul du nombre de fléchettes correspondant à la deuxième solution (il confond le nombre de fléchettes et le nombre d'opérations)

---

[1] *Remarque*. Sans la *règle implicite*,

une autre solution apparaît si Guillaume lance 4 fléchettes et Jeanne en lance 8,

✓ Guillaume a lancé deux fléchettes dans la zone du 11, une fléchette dans la zone du 7 et une fléchette dans la zone du 5 ;

✓ Jeanne a lancé deux fléchettes dans la zone du 7, quatre fléchettes dans la zone du 5 et deux en dehors de la cible

une autre solution apparaît si Guillaume lance 4 fléchettes et Jeanne en lance 6,

✓ Guillaume a lancé deux fléchettes dans la zone du 11, une fléchette dans la zone du 7 et une fléchette dans la zone du 5 ;

✓ Jeanne a lancé deux fléchettes dans la zone du 11, une fléchette dans la zone du 7, une fléchette dans la zone du 5 et deux en dehors de la cible,

et une dernière solution apparaît si Guillaume lance 6 fléchettes et Jeanne en lance 8,

✓ Guillaume a lancé deux fléchettes dans la zone du 7 et quatre fléchettes dans la zone du 5 ;

✓ Jeanne a lancé deux fléchettes dans la zone du 7, quatre fléchettes dans la zone du 5 et deux en dehors de la cible.

[2] *Remarque*. Sans la *règle implicite*, la *règle implicite* elle-même semble faire défaut, mais il est acceptable de présenter un problème qui n'admette pas une unique solution.

Erreur d'attribution : il n'attribue pas les scores trouvés aux deux personnages.[3]

✓ **Groupe 2**.

Procédure : par additions en lignes et posées.

Décompositions de 34 : une seule est trouvée.

Erreur(s) : nombre de fléchettes non explicite ; il trouve une fausse solution à cinq fléchettes à cause d'une erreur d'addition.

Erreur d'attribution : il n'attribue pas correctement les scores trouvés aux deux personnages.[3]

✓ **Groupe 3**.

Procédure : par additions en lignes.

Décompositions de 34 : les deux sont trouvées.

Erreur(s) : nombre de fléchettes non explicite.

Erreur d'attribution : il n'attribue pas correctement les scores trouvés aux deux personnages (inversion des scores).[3]

✓ **Groupe 4**.

Procédure : par multiplication et additions en lignes en un calcul parenthésé (le calcul parenthésé est inutile) ; recours à un schéma (le schéma n'est pas utilisé pour la rédaction de la solution).

Décompositions de 34 : les deux sont trouvées.

Erreur(s) : nombre de fléchettes non explicite.

Erreur d'attribution : aucune.

✓ **Groupe 5**.

Procédure : par addition en lignes ; recours à un schéma.

Décompositions de 34 : une seule est trouvée.

Erreur(s) : nombre de fléchettes non explicite.

Erreur d'attribution : il attribue deux fois la même décomposition.[3]

4. La différence essentielle des deux situations vient des nombres situés dans les diverses zones de la cible. Dans le problème du document de l'annexe 4, au lieu des "petits nombres" (5, 7 et 11), on a des **"grands nombres"**.

   Au niveau des objectifs, si l'annexe 1 présente un exercice où l'on travaille sur les décompositions additives, on travaille dans l'exercice 4 sur la **décomposition décimale et canonique** des nombres (le choix du nombre de fléchettes inférieur à la "base" permet d'éviter les procédures d'"échange de base").

   En proposant ce problème de l'annexe 4, le maître vise un **réinvestissement** de la décomposition décimale et canonique, alors que pour l'exercice de l'annexe 1, il s'agissait de mettre les élèves en situation de recherche.

[3]*Remarque*. Sans la *règle implicite*, il n'y a pas qu'une attribution possible des scores.